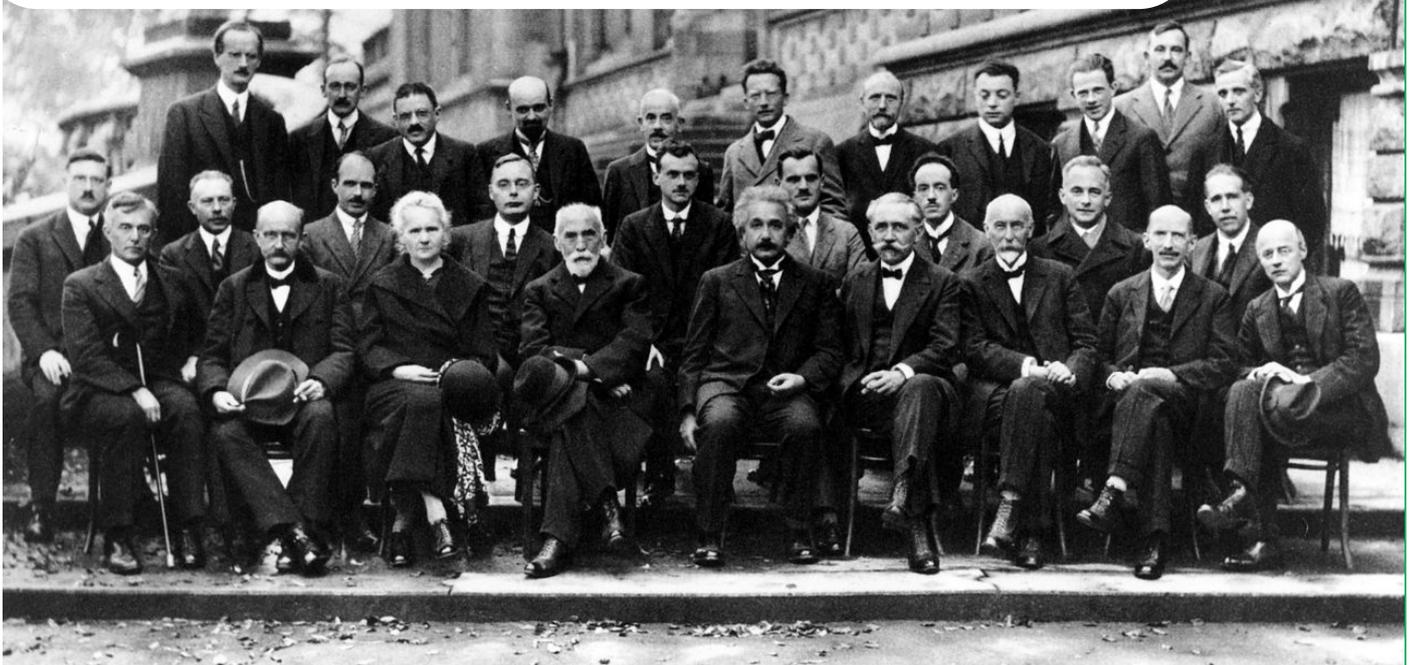


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GUIA DE LABORATÓRIO FÍSICA EXPERIMENTAL I



1ª Versão - 2018

Prefácio

A capa deste guia apresenta uma fotografia da 51 conferência de Física em 1927, considerada a maior reunião de gênios do século XX, onde 17 dos 29 participantes tinham ou ganhariam o Premio Nobel. A experimentação científica foi o dia a dia de muito deles. Física é um curso fascinante! E estudá-la do ponto de vista experimental é a base para o bom entendimento da natureza. Assim, as disciplinas experimentais têm como principais objetivos desenvolver no estudante habilidades e competências para a correta utilização de instrumentos simples de laboratório, desenvolver o senso crítico para a interpretação de resultados experimentais, aprimorar a escrita científica na forma de relatórios, sínteses ou artigos, além de desenvolver o uso de ferramentas tecnológicas tais como calculadoras científicas, computadores, internet, e outros.

Este guia é uma compilação de roteiros de experimentos de Física utilizados nas mais diversas instituições de ensino superior do país. Muitos destes roteiros estão incrementados com adaptações aos equipamentos que dispomos no laboratório, entre outros que foram criados/desenvolvidos aqui no DF-UFPB. O nível dos experimentos e a sequência de sua realização ao longo do curso obedece a um planejamento que visa também contribuir para o entendimento de fundamentos teóricos apresentados nas disciplinas correspondentes.

Iniciamos este guia com roteiros de experimentos voltados mecânica e termodinâmica são apresentados de forma gradativa do ponto de vista conceitual e de habilidade experimental. Os apêndices são iniciados por uma apostila sobre conceitos básicos da teoria de erros* utilizada IFGW - Unicampi e desenvolvida pelo professor Manfredo H. Tabacniks. O conteúdo desta é imprescindível, pois trabalharemos extensivamente com a confecção e análise de gráficos. Na sequência, apresentamos um tutorial básico sobre a utilização do *software* para análise de dados muito utilizado no mundo da física - **OriginLab**. Este tutorial é utilizado nos laboratórios de ensino da USP e foi desenvolvido por Elisa Morandé Sales. Em seguida apresentamos uma alternativa para o uso e incentivo do *software* livre para análise de dados o **QtiPlot - Data Analysis and Scientific Visualisation**. Ele tem funcionamento similar ao OriginLab. Fica aqui a sugestão para fazer uma doação ao autor do programa. Isto serve para incentivá-lo a continuar com o projeto de desenvolvimento deste *software*. Um tutorial online muito bom pode ser visualizado na página do Prof. Angelo M. Gomes do Instituto de Física - Universidade Federal do Rio de Janeiro[†]. Maiores detalhes sobre o este *software* podem ser obtidos na página oficial do Qtiplot.[‡]
Esta é uma versão preliminar ainda em construção.

Professores

Charlie Salvador Gonçalves

Jesús Pavón Lopes

Joel Batista da Fonseca Neto

Karoline de Oliveira Moura

Thierry Marcelino Passerat de Silans

Umbelino de Freitas Neto

Técnicos de Laboratório

Bruno César Nóbrega de Souza

Humberto da Silva Oliveira

Marcelo da Fonseca Santana

Vladyr Yuri Soares de Lima Cavalcanti



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**NORMAS DE UTILIZAÇÃO DOS
LABORATÓRIOS**

1. É proibido entrar com alimentos nos laboratórios;
2. É proibido fumar nos laboratórios ou em áreas próximas;
3. É proibido ao estudante permanecer sozinho nos laboratórios;
4. É proibido correr ou brincar nos laboratórios;
5. É obrigatório o uso de óculos de segurança quando informado;
6. É obrigatório o uso de calçados fechados;
7. Use vestimenta adequada: calças ou saias compridas;
8. Não use ornamentos metálicos durante as atividades;
9. Cabelos compridos devem estar amarrados;
10. Objetos pessoais como bolsas, blusas, etc, devem ser guardados na estante;
11. Siga corretamente os roteiros das aulas e não improvise;
12. As bancadas de trabalho devem estar limpas e arrumadas após as atividades;
13. Receber visitas apenas fora dos laboratórios;
14. Não leve a mão à boca ou aos olhos quando manusear produtos químicos;
15. Reagentes ou resíduos devem ser descartados em frascos específicos;
16. Em caso de acidentes, mantenha a calma e chame o responsável.



Sumário

1	Determinação da aceleração gravitacional local	5
1.1	Fundamentação Teórica	5
1.2	Material Utilizado	6
1.3	Procedimento Experimental	6
1.4	Questionário	6
2	Determinação da aceleração do MRUV	7
2.1	Fundamentação Teórica	7
2.2	Material Utilizado	7
2.3	Procedimento Experimental	7
2.4	Questionário	8
3	Determinação do alcance no MRUV	9
3.1	Fundamentação Teórica	9
3.2	Material Utilizado	10
3.3	Procedimento Experimental	10
3.4	Questionário	11
3.5	Fundamentação Teórica	12
3.6	Material Utilizado	12
3.7	Procedimento Experimental	12
3.8	Questionário	13
4	Dilatação Térmica	14
4.1	Fundamentação Teórica	14
4.2	Material Utilizado	14
4.3	Procedimento Experimental	14
4.4	Questionário	15
	APÊNDICE	16
A	Tutorial	16
B	Teoria de Erros e Medidas	16
C	Tutorial de utilização do Origin	39
D	Modelo para Relatório	46

1 Determinação da aceleração gravitacional local

Este material é baseado nos roteiros de Física experimental do IFGW - Unicamp¹ e manual de equipamentos da Phywe².

Neste experimento faremos a observação do movimento de um pêndulo. Mediremos os períodos de oscilação para pêndulos de comprimentos diferentes, coletando valores de grandezas relevantes no processo para a determinação da aceleração gravitacional local.

OBJETIVOS

- Observar o movimento pendular identificando as grandezas relevantes;
- Medir as grandezas físicas de forma correta;
- Obter um espaço amostral de dados suficientes para análise estatística do problema;
- Expressar de forma correta os valores obtidos;
- Determinar a relação entre o período e o comprimento do pêndulo, e o valor da aceleração da gravidade local;
- Determinar a constante de amortecimento via relação entre a amplitude e tempo de oscilação;
- Expressar os resultados na forma de gráficos e obter curvas de ajustes.

1.1 Fundamentação Teórica

A equação de movimento para um pêndulo simples de massa m é :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad (1)$$

onde é frequência angular dada por

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}, \quad (2)$$

g é a aceleração da gravidade e L o comprimento do pêndulo. Para pequenas oscilações, isto é, para $\theta \ll 15^\circ$, temos que $\sin\theta \approx \theta$, o que nos leva a escrever a equação de movimento com boa aproximação³ como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3)$$

cuja solução é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (4)$$

O movimento é então harmônico simples com amplitude θ_0 e fase inicial ϕ , que são determinados a partir das condições iniciais. Da equação 2 e de $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$, temos a seguinte expressão para o período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (5)$$

Em um tratamento mais completo devemos levar em conta a dissipação, que nesse caso é devido essencialmente a força de arrasto devido ao ar. Para pequenas velocidades essa força é proporcional a velocidade,

$$F = -bv \quad (6)$$

onde b depende das características do corpo. A equação do movimento, considerando a dissipação, é então (para ângulos pequenos):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad (7)$$

Onde $\gamma = \frac{b}{m}$. Na situação em que $\gamma < 2\omega_0$, o movimento é harmônico amortecido, e a solução da equação 5 é:

$$\theta(t) = A(t) \cos(\omega_1 t), \quad (8)$$

onde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \quad (9)$$

e

$$A(t) = \theta_0 e^{-\left(\frac{\gamma}{2}t\right)}, \quad (10)$$

onde $A(t)$ é a amplitude do movimento e θ_0 a amplitude inicial.

1.2 Material Utilizado

1. Pêndulo simples;
2. cronômetro;
3. trena ou fita métrica;
4. régua.

1.3 Procedimento Experimental

Parte 1

Para oito valores diferentes do comprimento (L) do pêndulo meça o período T. A imprecisão das medidas pode ser reduzida se, para cada comprimento, forem feitas várias medidas independentes e for tomada a média como valor do período para aquele comprimento. Faça cinco medidas de T para cada comprimento do pêndulo. Ao fazer cada medida deixe o pêndulo oscilar algumas vezes, meça o tempo total e divida pelo número de oscilações.

Tabela 1: Comprimento *versus* tempo.

n	comprimento (cm)	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Parte 2

Coloque o pêndulo para oscilar e meça valores da amplitude em função do tempo. Construa uma tabela com dez valores.

Tabela 1: Amplitude *versus* tempo de oscilação.

n	amplitude (cm)	tempo (s)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1.4 Questionário

Parte 1

1. Construa uma tabela contendo os valores de L, T, \bar{T} e os respectivos desvios.
2. Obtenha o valor médio de g e o seu desvio (utilize as notas de aula sobre erros).
3. Construa o gráfico $\bar{T} \times L$ (em papel milimetrado).
4. Construa o gráfico $\bar{T}^2 \times L$ (em papel milimetrado).
5. A partir do gráfico obtenha o valor de g e o seu desvio.

Parte 2

1. Faça um gráfico (em papel milimetrado) da amplitude em função do tempo, ou seja, A *versus* t , (lembre-se que t é o tempo decorrido desde o início do movimento, e A a amplitude (em radianos) das oscilações).
2. Em um papel para gráficos tipo mono-log, trace a curva para A *versus* t .
3. Encontre o valor de γ .
4. Obtenha o valor da aceleração local da gravidade usando a equação 9 e estime o erro que foi cometido por ter sido desprezado o amortecimento na parte 1 da prática. Comente. Use o método dos mínimos quadrados e trace a curva.

Referências

1. Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física Moderna*, Versão 11.10 - 2010.
2. D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 2, 8a. Ed. (2008).
- 3 http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html. Acesso em 10 de abril de 2016.
- 4 <https://www.ifi.unicamp.br/~brito/graferr.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

2 Determinação da aceleração do MRUV

Este material é baseado nos roteiros de Física experimental do IFGW - Unicamp¹ e manual de equipamentos da Phywe².

Neste experimento faremos a observação do movimento retilíneo uniformemente variado - MRUV de uma esfera descendo um plano inclinado. Mediremos os tempos de descida, coletando valores de grandezas relevantes no processo para a determinação da aceleração da esfera.

OBJETIVOS

- Estudar o movimento de uma esfera descendo um plano inclinado;
- Representar graficamente os valores experimentais x como função do tempo;
- Determinar a velocidade média do movimento;
- Determinar a velocidade instantânea do movimento em vários instantes e construir o gráfico de $v=f(t)$;
- Obter o valor da aceleração do movimento.

2.1 Fundamentação Teórica

Aceleração instantânea

Quando a velocidade v de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofreu uma aceleração. Para movimentos ao longo de um eixo, a aceleração média a_{med} em um intervalo de tempo Δt é:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (11)$$

A aceleração instantânea é dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (12)$$

A aceleração de uma partícula em qualquer instante é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante.

Aceleração constante

Em muitos tipos de movimento, a aceleração é constante ou aproximadamente constante. Esses casos são tão frequentes que foi formulado um conjunto especial de equações para lidar com eles. Considerando o caso de aceleração constante, pode-se demonstrar que a velocidade da partícula varia com o tempo segundo a função

$$v = v_0 + at, \quad (13)$$

onde v_0 é a velocidade inicial.

Para a função da velocidade, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é a média aritmética da velocidade no início do intervalo com a velocidade no final do intervalo. Para um intervalo de $t=0$ até um instante t , portanto, a velocidade média é:

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (14)$$

Substituindo o valor de v da equação 13 na equação 14 e, considerando a posição inicial igual a zero ($x_0 = 0$) obtemos:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (15)$$

Com esta função pode-se determinar a posição da partícula em movimento com aceleração constante.

2.2 Material Utilizado

1. trilho constituído por dois canos de alumínio;
2. uma esfera em aço inox;
3. cronômetro;
4. trena ou régua.

2.3 Procedimento Experimental

Parte 1

1. Estabelecer um pequeno ângulo de inclinação (θ) para o plano inclinado, anote a altura resultante (H) e o compri-

mento do plano (L);

2. Considerar cinco posições diferentes no plano inclinado e medir o tempo, em que a esfera passa por cada posição escolhida, partindo do repouso;
3. Filme o movimento de descida da esfera para comparar com o tempo medido no cronômetro;
4. Repetir o item anterior 10 (dez) vezes, anotando os resultados na tabela 1.
5. Estabeleça uma nova inclinação e repita os procedimentos anteriores.

Tabela 1: deslocamento *versus* tempo para θ_1 .

x	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{med}	t^2

Tabela 2: deslocamento *versus* tempo para θ_2 .

x	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{med}	t^2

Tabela 3: deslocamento *versus* tempo para θ_3 .

x	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{med}	t^2

4. Determine as funções do deslocamento e da velocidade que descrevem o movimento investigado experimentalmente. Calcule os valores da aceleração e da velocidade usando estas equações.
5. Calcule o erro percentual entre o valor teórico e o obtido experimentalmente (pelo gráfico).
6. Qual o significado físico da tangente de qualquer ponto da curva do gráfico x versus t ?
7. Qual o significado físico da tangente do gráfico v versus t ? Qual o significado físico da área sobre a curva?
8. O ângulo de inclinação influencia o valor da aceleração do objeto? Explique.
9. O que pode contribuir para os erros de medição?
10. Utilizando as funções horárias do deslocamento e da velocidade deduza a expressão conhecida como equação de Torricelli .

Referências

- 1 Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física: Mecânica*, Versão 11.10 - 2010.
- 2 D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 2, 8a. Ed. (2008).
- 3 <https://www.ifl.unicamp.br/~brito/graferr.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

2.4 Questionário

Parte 1

1. 1. Construa o gráfico da posição versus tempo em papel milimetrado e dilog. Ajustar a melhor curva entre os pontos experimentais.
2. Construa o gráfico da posição versus o quadrado do tempo em papel milimetrado. Ajustar a melhor curva entre os pontos experimentais e determinar a função que melhor descreve o movimento investigado.
3. Escolha o gráfico conveniente e determine a aceleração sofrida pelo objeto.

3 Determinação do alcance no MRUV

Este material é baseado nos roteiros de Física experimental do IFGW - Unicamp¹ e artigos de revistas de ensino de Física⁵.

Neste experimento faremos uma expansão do experimento anterior. A esfera descendo no plano inclinado agora será lançada ao chão. Sabendo determinar a velocidade de lançamento da esfera na extremidade da rampa é possível determinarmos o alcance da esfera. O experimento consiste em fazer gráficos de alcance x velocidade de lançamento e comparar com o modelo teórico.

OBJETIVOS

- Estudar o lançamento de uma esfera descendo um plano inclinado;
- Representar graficamente os valores experimentais do alcance como função da velocidade;
- Obter gráficos de alcance x velocidade de lançamento e comparar com o modelo teórico.

3.1 Fundamentação Teórica

Analisaremos o problema de um corpo rígido esférico rolando sem deslizar em um plano inclinado e lançado ao chão com velocidade v_{cm} , conforme Fig. 1

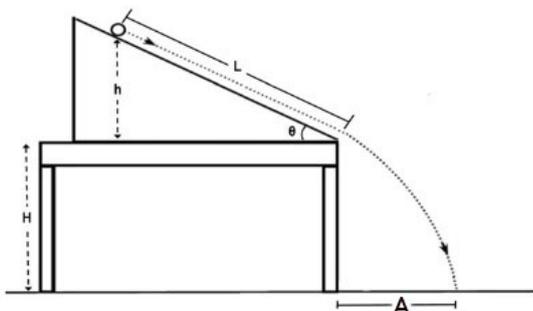


Fig. 1 Esfera descendo um plano inclinado e lançada ao chão.

As forças que atuam sobre o corpo rígido quando este se desloca sem escorregamento sobre um plano inclinado de altura h são: o peso, a força normal, que equilibra a componente normal do peso, e a força de atrito que é exercida pelo plano, conforme mostrado na Fig. 2.

A força de atrito é a causadora do movimento de rotação e, em uma boa aproximação a energia mecânica é conservada. Portanto:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2, \quad (16)$$

em que I_{cm} é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa.

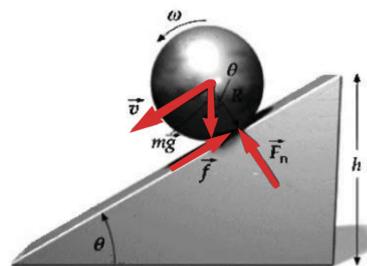


Fig. 2 Diagrama⁴ de forças de uma esfera descendo um plano inclinado.

Assim, a energia potencial cedida à esfera ao elevá-la, será transformada nestas 2 parcelas de energia cinética.

Podemos dizer que, no movimento de rotação, o momento de inércia é análogo à massa no movimento de translação, ou seja, é tanto mais difícil fazer o corpo girar quanto maior for o seu momento de inércia. Para um corpo rígido girando em torno de seu eixo de simetria o momento de inércia vale:

$$I = \frac{1}{2}\gamma mR^2, \quad (17)$$

onde γ é um fator fracionário dependente da geometria.

Da equação 16 podemos escrever de forma geral, para a velocidade do centro de massa no término do plano inclinado como:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\gamma mR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2, \quad (18)$$

onde,

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1 + \gamma}. \tag{19}$$

Um resultado importante na equação anterior é que a velocidade do centro de massa independe do raio R e da massa m do corpo rígido. Observe, na mesma equação, que os corpos com valores de γ pequenos chegam primeiro que os corpos com valores de γ elevados. Para uma esfera maciça com $\gamma = \frac{2}{5}$,

$$v_{cm}^2 = \frac{10gh}{7}. \tag{20}$$

Considerando que a esfera será lançada ao chão de uma altura H (altura da mesa), podemos calcular o alcance da mesma considerando que a velocidade de lançamento será v_{cm} obtida na equação 20.

Para tanto, o modelo teórico leva em conta que o lançamento é uma composição de dois movimentos simultâneos. Um horizontal, (em movimento retilíneo uniforme, logo sem aceleração) e outro vertical (em movimento retilíneo uniformemente variado, sob a ação da aceleração gravitacional local). Logo, v_{cm} será decomposta nas duas componentes: v_x e v_y . O alcance A pode então ser encontrado usando a seguinte expressão:

$$A = v_x t_q, \tag{21}$$

onde $v_x = v_{cm} \cos \theta$, θ é o ângulo do plano inclinado e t_q é o tempo de queda da esfera.

O t_q é obtido a partir da equação da velocidade no movimento de queda:

$$v_{y(f)} = v_{y(0)} + gt, \tag{22}$$

onde, $v_{y(0)} = v_{cm} \sin \theta$. A velocidade final na direção vertical $v_{y(f)}$, pode ser obtida a partir da equação de Torricelli:

$$v_{y(f)}^2 = v_{y(0)}^2 + 2gH, \tag{23}$$

Assim,

$$t_q = \frac{v_{y(f)} - v_{y(0)}}{g} \tag{24}$$

Portanto, conhecendo os valores das grandezas da Fig. 2 é possível obter o valor do alcance da esfera de forma experimental e prever teoricamente seu valor.

3.2 Material Utilizado

1. trilho constituído por dois canos de alumínio;
2. uma esfera em aço inox;
3. cronômetro;
4. trena ou régua.
5. prumo;
6. papel carbono.

3.3 Procedimento Experimental

Parte 2 - Determinar $A \times v_{cm}$

1. Estabelecer um pequeno ângulo de inclinação (θ) para o plano inclinado, anote a altura resultante (h) e o comprimento do plano (L) para estabelecer o valor de θ ;
2. Posicione a saída da rampa exatamente na extremidade da mesa.
3. Para medir o alcance, fixe uma folha de papel ao solo logo abaixo do aparelho. Segure a linha de prumo em frente ao aparelho e marque no papel o ponto exatamente abaixo da borda da mesa.
4. Fixe sobre o solo, na área de impacto, uma folha de papel quadriculado e sobre ela uma de papel carbono, de modo a poder registrar os pontos de impacto. O alcance é a distância entre cada um desses pontos e o ponto no solo diretamente abaixo da localização da base da rampa. Cuidado para não movimentar a mesa.
5. Considerar cinco posições diferentes no plano inclinado e, partindo do repouso, deixar a esfera rolar até cair de uma altura H da mesa;
6. Usando o procedimento do experimento anterior, determine a velocidade final v_{cm} da esfera na saída da rampa;
7. Marque o alcance da esfera com auxílio do papel carbono.
8. Repetir o item anterior 5 vezes, para cada posição, anotando os valores médios como no modelo da tabela 1.
9. Filme o movimento de descida da esfera para comparar com o tempo medido no cronômetro;
10. Estabeleça mais duas novas inclinações e repita os procedimentos anteriores para preencher as tabelas 2 e 3.

Tabela 1: Alcance $\times v_{cm}$ para θ_1 .

\bar{h}	\bar{d}	\bar{t}	\bar{v}_{cm}	\bar{A}
\bar{h}_1	\bar{d}_1	\bar{t}_1	$\bar{v}_{cm(1)}$	\bar{A}_1
\bar{h}_2	\bar{d}_2	\bar{t}_2	$\bar{v}_{cm(2)}$	\bar{A}_2
\bar{h}_3	\bar{d}_3	\bar{t}_3	$\bar{v}_{cm(3)}$	\bar{A}_3
\bar{h}_4	\bar{d}_4	\bar{t}_4	$\bar{v}_{cm(4)}$	\bar{A}_4
\bar{h}_5	\bar{d}_5	\bar{t}_5	$\bar{v}_{cm(5)}$	\bar{A}_5

Tabela 2: Alcance $\times v_{cm}$ para θ_2 .

\bar{h}	\bar{d}	\bar{t}	\bar{v}_{cm}	\bar{A}

Tabela 3: Alcance $\times v_{cm}$ para θ_3 .

\bar{h}	\bar{d}	\bar{t}	$\overline{v_{cm}}$	\bar{A}

3.4 Questionário

Parte 2

1. Construa o gráfico do alcance \times velocidade do centro de massa (para cada ângulo) em escala linear com auxílio de um software.
2. Ajuste a melhor curva entre os pontos experimentais. Utilize o software.
3. Construa o gráfico do alcance \times velocidade do centro de massa de tal forma que fique linearizado. É possível?. Explique. Utilize o software.
4. Compare o modelo teórico com os resultados experimentais. Para tanto, obtenha a curva teórica inserindo no gráfico 1.
5. Construa um gráfico único com todos os resultados.
6. Calcule as incertezas pela teoria de propagação de erros e adicione-as como barra de erro nos gráficos.
7. Discuta fisicamente sobre as curvas obtidas teoricamente e experimentalmente.

Referências

- 1 Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física: Mecânica*, Versão 11.10 - 2010.
- 2 D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 2, 8a. Ed. 2008.
- 3 TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2*, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- 4 <https://www.ifi.unicamp.br/brito/graferr.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2018.
- 5 Cad. Bras. Ens. Fís., v. 28, n. 3: p. 693-699, dez. 2011.

Ondas Estacionárias em Cordas

Este material é baseado nos roteiros de Física experimental do IFGW - Unicamp¹ e artigos de revistas de ensino de Física⁵.

Neste experimento estudaremos as ondas estacionárias verificando as relações entre as frequências de vibração e as tensões a que as cordas estão submetidas para determinar a densidade linear de massa das cordas.

OBJETIVOS

- Estudar a propagação de ondas em cordas e o estabelecimento de ondas estacionárias,
- Determinar a densidade linear das cordas.

3.5 Fundamentação Teórica

Em uma corda com extremidades fixas podem ser estabelecidas ondas estacionárias que correspondem aos modos normais de vibração da corda. Para uma corda de comprimento L , o comprimento de onda associado ao modo n (onde $n=1, 2, 3, \dots$) é dado por:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (25)$$

onde λ é o comprimento de onda, L o comprimento entre nós (n o número de modos).

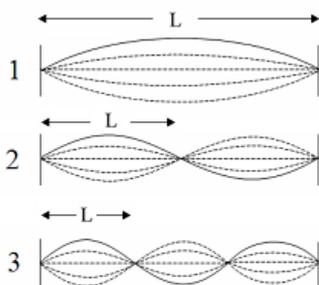


Fig. 3 Ondas estacionárias em uma corda apresentado 1, 2 e 3 ventres.

Na Fig. 3 podemos ver os 3 modos de vibração mais baixos de uma corda. Sabendo que:

$$v = \lambda f, \quad (26)$$

onde f é a frequência de vibração da corda e v é a velocidade de propagação da onda, obtemos a seguinte equação:

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (27)$$

Usando a equação da velocidade de propagação de uma onda em uma corda de densidade linear de massa μ , submetida a uma tensão τ :

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (28)$$

e juntando as equações 27 e 28 teremos:

$$\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (29)$$

Reescrevendo agora a Eq. 25 em termos da Eq. 29 teremos:

$$L(n) = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} n. \quad (30)$$

3.6 Material Utilizado

1. Gerador de ondas;
2. Cordões;
3. Roldana;
4. Trena ou fita métrica;
5. Balança e
6. Massas.

3.7 Procedimento Experimental

Estabelecer ondas estacionárias em um cordão e construir uma tabela para valores de λ e τ .

Obs: a vibração do cordão é acionada por uma bobina com núcleo de ferro ligada na rede elétrica, a qual oscila eletricamente na frequência de 60 Hz. Durante o período de uma onda completa, a onda mecânica, passa por uma amplitude positiva e outra negativa, isto é, passa pelo zero duas vezes. Assim, a frequência de oscilação do cordão é 120 Hz.

1. Pese as massas e os cordões nas várias balanças distribuídas nas mesas. Determine seus valores.
2. Pegue um dos cordões fornecidos e amarre uma de suas extremidades no orifício central da haste do gerador, passe-o pela roldana que está fixada na borda da mesa e amarre a outra extremidade na bandeja. Coloque uma das massas fornecidas na bandeja.
3. Ligue o gerador e ajuste o comprimento do cordão de modo que sejam produzidas ondas estacionárias com nodos e ventres bem definidos ($n=1$, $n=2$ e $n=3$, conforme a 3).
4. Meça o comprimento L de acordo com a Fig. 3.
5. Varie a tensão na corda (ou seja, altere o valor da massa que está presa na extremidade da corda). Meça novamente a distância entre dois nodos. Faça este procedimento para quatro massas diferentes, adicionando as massas.
6. Preencha as tabela 1 ,2 3 e 4. Quantos valores de n você consegue obter? Preencha as tabelas com o valor máximo de n .

Referências

- 1 Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física: Mecânica*, Versão 11.10 - 2010.
- 2 D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 2, 8a. Ed. 2008.
- 3 TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2*, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- 4 <https://www.ifi.unicamp.br/~brito/graferr.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2018.

Tabela 1 Cordão 1 e massa 1	Tabela 2 Cordão 1 e massa 2	Tabela 3 Cordão 1 e massa 3	Tabela 4 Cordão 1 e massa 4
--	--	--	--

n	L (cm)						

7. Construa uma tabela contendo L e τ ;
8. Repita o procedimento acima, para os outros cordões.
9. Construa gráficos em papel log-log de $L \times \tau$. Assumindo que:

$$L = k\tau^b, \tag{31}$$

obtenha os valores de k e de b . Compare b com a expressão teórica (eq. 28).

10. A partir dos valores de k obtenha as densidades dos cordões (considerando que a eq.28 seja válida).

.....

3.8 Questionário

Questões a serem respondidas em função de suas observações experimentais.

1. Existe um nodo na corda na posição do gerador? Explique.

4 Dilatação Térmica

Este material é baseado nos roteiros de Física experimental do IFGW - Unicamp¹.

Neste experimento utilizaremos 3 barras metálicas de materiais diferentes, estudaremos como a variação da temperatura na barra afeta seu comprimento e determinaremos os coeficientes de dilatação lineares destes materiais.

OBJETIVO

- Determinar o coeficiente de dilatação linear de uma barra metálica e descobrir de qual material é composta.

4.1 Fundamentação Teórica

Se a temperatura de uma barra metálica de comprimento L_0 aumenta de uma quantidade ΔT , o seu comprimento aumenta de uma quantidade ΔL , conforme a Eq. 32:

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T, \quad (32)$$

onde α é uma constante chamada de coeficiente de dilatação linear. Seu valor depende do material e da faixa de temperatura.

Podemos reescrever a equação 32 evidenciando o coeficiente de dilatação térmica do material:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{\Delta L}{\Delta T}. \quad (33)$$

Assim, α é o aumento fracional no comprimento por mudança unitária na temperatura. Embora α varie um pouco com a temperatura, para muitas aplicações práticas a temperaturas ordinárias, podemos supor que ele é constante. A tabela 5 mostra alguns coeficientes de dilatação linear.

Tabela 5 Coeficientes de dilatação linear para alguns materiais.

Substância	$10^{-6}/^{\circ}C$
Chumbo	29
Alumínio	24
Latão	19
Cobre	17
Aço	11
Vidro (pirex)	3,2

4.2 Material Utilizado

O aparato experimental é mostrado na Fig. 4.

- Aparelho de expansão linear;
- Fonte de tensão;

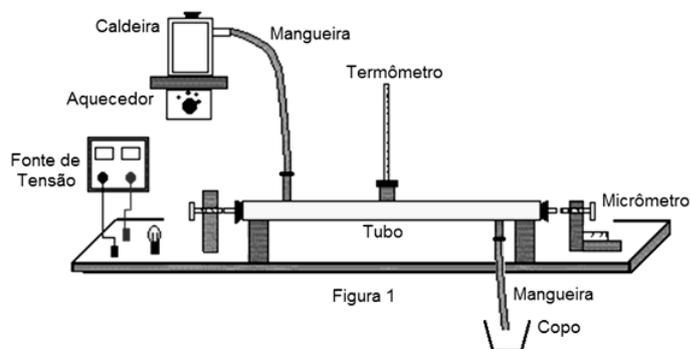


Fig. 4 Aparato experimental utilizado no experimento de dilatação térmica.

- Haste de metal;
- Tubo;
- Termômetro;
- Trena;
- Caldeira;
- Aquecedor elétrico;
- Copo e
- Mangueiras.

4.3 Procedimento Experimental

- De posse da haste de metal, meça e registre seu comprimento (L_0);
- Verifique e registre a resolução do micrômetro;
- Monte a haste no tubo cilíndrico (laranja) e fixe no aparelho de expansão;
- Coloque 350 ml de água na caldeira;

5. Ligue as extremidades do tubo cilíndrico utilizando as mangueiras, uma à caldeira e outra ao copo (conforme a Fig. 4);
6. Ligue a fonte de tensão, ajuste em aproximadamente 3 V e 0,4 A;
7. Feche o circuito, movendo o micrômetro e o parafuso perto da lâmpada até a luz acender;
8. Registre a leitura do micrômetro (L_1);
9. Gire em duas voltas o micrômetro afastando-o da haste;
10. Insira o termômetro através do tubo e registre a temperatura (T_0);
11. Ligue o aquecedor elétrico e coloque em posição para ferver a água contida na caldeira;
12. Verifique a temperatura da haste até que a leitura esteja estabilizada, espere ocorrer o equilíbrio térmico e registre a temperatura (cerca de 5 minutos);
13. Retorne o micrômetro lentamente até fechar o circuito, registre essa leitura (L_2); afaste o micrômetro e repita a leitura em um minuto. Se a haste ainda está em expansão, repita em intervalos frequentes até que ele atinja a sua leitura máxima.
14. Desligue o aquecedor da tomada e a fonte de tensão;
15. Aguarde durante um tempo o resfriamento do conjunto e depois desmonte o sistema secando-o;
16. Desmonte o equipamento, seque o sistema e limpe a mesa.

4.4 Questionário

Questões a serem respondidas em função de suas observações experimentais.

1. Calcule o coeficiente de dilatação linear do seu experimento.
2. Considerando que todas as hastes utilizadas neste experimento são feitas do mesmo material, calcule o coeficiente de dilatação linear médio (e sua incerteza) utilizando os dados dos outros experimentos;

Mesa 1) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 2) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 3) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 4) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 5) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 6) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 7) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

Mesa 8) estudante: _____

$$T_0 = \text{_____} T = \text{_____};$$

$$L_0 = \text{_____}; L_1 = \text{_____}; L_2 = \text{_____}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = \text{_____};$$

$$\alpha = \text{_____}$$

3. Compare percentualmente os valores que você obteve com os tabelados. Qual o material da haste?
4. Mostre que a equação $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ pode ser escrita como: $L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$, reconhecendo cada termo da mesma.
5. Faça o relatório do experimento individualmente no formato pré estabelecido na disciplina, descrevendo detalhadamente todo o processo experimental.

Referências

- 1 <https://www.ifi.unicamp.br/~brito/graferr.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2018.
- 2 Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física: Termodinâmica*, Versão 11.10 - 2010.
- 3 D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 2, 8a. Ed. 2008.
- 4 TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2, 5a ed.* Rio de Janeiro: LTC, 2006.

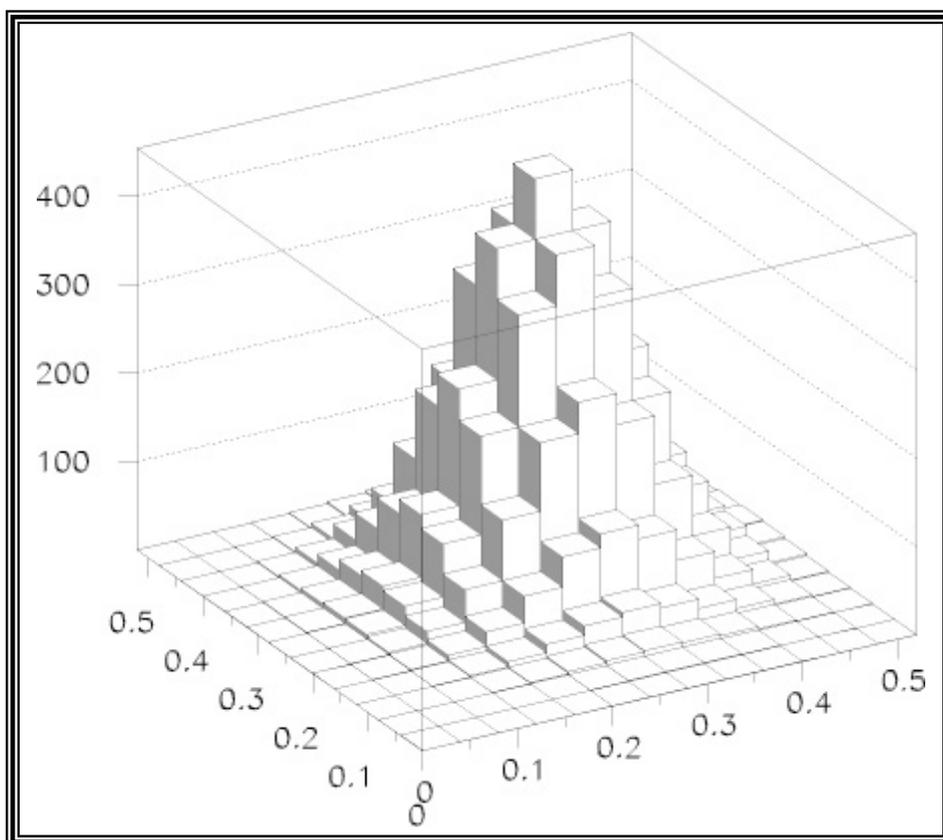


Universidade de São Paulo



Instituto de Física

Conceitos Básicos da Teoria de Erros



Manfredo H. Tabacniks

Revisão 2009 (Alain A. Quivy)
Revisão 2011 (Marcelo Martinelli, José Roberto Oliveira, Alexandre Levin)

“Embora este Guia forneça um esquema de trabalho para obter incerteza, ele não pode substituir pensamento crítico, honestidade intelectual e habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina, nem um trabalho puramente matemático. Ela depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. Assim, a qualidade e a utilidade da incerteza apresentada para o resultado de uma medição dependem, em última instância, da compreensão, análise crítica e integridade daqueles que contribuíram para atribuir o valor à mesma.”

Tradução de um trecho do “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”, International Organization for Standardization, Geneva (1993).

1. EXPRESSÃO DE VALORES DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

1.1. Introdução

Medir implica em comparar uma característica de um sistema (por exemplo, comprimento, volume, velocidade, massa, temperatura, etc.) com referências tidas como padrão (unidades). Exemplos de padrões são o metro (para comprimentos), o segundo (para tempo), o quilograma (para massa), definidos por Institutos de Metrologia ao redor do mundo, que definem o sistema MKS, ou SI (sistema internacional de unidades). Outras unidades de medida são os múltiplos e submúltiplos destas grandezas (mm, km, cm), as grandezas derivadas destas grandezas (m/s, m/s²). Além disso, existem outras unidades empregadas fora do SI, como a polegada (comprimento) e a libra (peso).

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser adquirido através de um procedimento que, em geral, envolve algum(s) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medida, assim como o instrumento utilizado, tem limites de *precisão* e *exatidão*, ou seja, toda medida realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medida, do instrumento usado e a reprodutibilidade da grandeza medida têm que ser expressas de alguma forma. Em alguns aparelhos, a incerteza do instrumento já vem marcada. Caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medida.

A incerteza é importante na hora de compararmos resultados. Na tabela abaixo temos os resultados de duas medidas de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e uma referência.

medida	viscosidade (g cm ⁻¹ s ⁻¹)
A	9,8 ± 0,4
B	12,3 ± 4,0
referência	9,3

Na tabela, o valor após o símbolo “±” indica em geral o *intervalo de confiança de um desvio padrão*¹, ou seja, o intervalo de tolerância da medida realizada, onde há 68% de probabilidade de conter o valor “verdadeiro” da grandeza. O valor que segue o símbolo “±” é denominado *incerteza*². No caso acima, apesar da medida A estar aparentemente mais próxima da referência, sua incerteza, expressa pelo intervalo de confiança, indica um provável erro de medida, enquanto o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor da referência.

1.2. Algarismos significativos

Em medidas físicas, é fácil encontrar uma dispersão de valores muito grande. O raio de um átomo e o raio do universo são exemplos entre tantos. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Escreve-se o valor com apenas um dígito antes da vírgula, completa-se com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez adequada. Por exemplo, o comprimento de um fio vale 14269513 mm ou é da ordem de 1,43x10⁷ mm. Note que usamos apenas dois algarismos após a vírgula, sendo que o último foi arredondado para “cima” uma vez que 1,4269 está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento aqui proposta é a de arredondar o último dígito para “cima” caso o próximo dígito seja ≥5, mantendo-o no caso contrário³. Note que ao truncar e arredondar as casas decimais, perdemos muito da

¹ Em física e engenharia é comum adotar um desvio padrão para o intervalo de confiança. Em outras áreas, tais como epidemiologia, saúde e ciências médicas, dois ou até três desvios padrão são bastante comuns.

² Deve-se evitar o termo erro para a incerteza. Se uma medida tem um erro, este deve ser corrigido!

³ Existem outras regras de arredondamento, mais complicadas, um pouco mais precisas, mas nenhuma é exata. A regra aqui proposta é também adotada pela maioria das calculadoras e algoritmos em computadores.

informação inicial, mas isso pode ser remediado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula. Por exemplo, $1,4269513 \times 10^7$ mm reproduz o valor com toda a precisão inicial.

Denomina-se *algarismo significativo* o número de algarismos que compõem o valor de uma grandeza, **excluindo eventuais zeros à esquerda** usados para acerto de unidades. Mas atenção: **ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS**. Na tabela a seguir, um mesmo valor do raio de uma roda é escrito com diferente número de algarismos significativos.

raio (mm)	significativos
57,896	5
$5,79 \times 10^1$	3
$5,789600 \times 10^1$	7
$0,6 \times 10^2$	1

A escolha de quantos significativos serão usados no valor da grandeza depende da grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado. Na realidade, o número de algarismos significativos de uma grandeza é determinado pela sua incerteza.

O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS DE UMA GRANDEZA É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA

Para a **expressão da incerteza** adaptaremos a convenção sugerida por Vuolo (1992).

Vamos tomar um exemplo para ilustrar uma medida, e a determinação de sua incerteza. Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na Figura 1.1

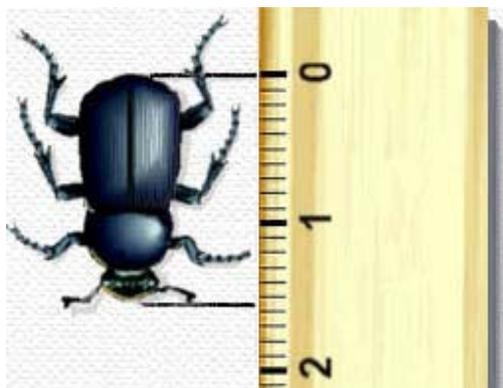


Figura 1.1. Medindo o tamanho de um besouro, com uma régua graduada em cm, com divisões de 1 mm.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro (por exemplo, o extremo de sua cabeça e a sua extremidade posterior), qual das alternativas abaixo melhor caracteriza a medida do tamanho do besouro?

- a) 1 cm
- b) 2 cm
- c) 1,5 cm
- d) 1,55 cm
- e) 1,546 cm

As alternativas a) e b) colocam claramente um limite inferior e superior para o comprimento do besouro. Mas podemos fazer melhor que isso. A alternativa c) é melhor, porém poderíamos igualmente dizer que o valor é 1,6 cm. O comprimento situa-se em algum valor entre estes dois, porém a alternativa e) superestima a capacidade de medida do nosso instrumento.

A melhor opção seria a alternativa d), onde temos certeza sobre os dois primeiros algarismos, e temos uma estimativa do último algarismo. Na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito duvidoso. Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento com resolução de décimos de mm que melhor expressa a medida. Falta no entanto estabelecer uma banda de confiança para a sua medida. Esta incerteza na estimativa do algarismo duvidoso

(seu último algarismo significativo) pode ser considerada, na ausência de especificações do fabricante⁴, como metade da menor divisão. Neste caso, 0,05 cm.

A expressão correta de uma medida deve conter a estimativa do valor de grandeza e a incerteza nesta estimativa. Isto pode ser feito colocando o intervalo de incerteza ao lado da medida

$$1,55 \pm 0,05 \text{ cm}$$

ou ainda colocando o valor com a incerteza do algarismo duvidoso entre parênteses, sem vírgula,

$$1,55 (5) \text{ cm}$$

Só para confirmar: Qual o diâmetro da moeda na Figura 1.2?



Figura 1.2. Medindo o diâmetro de uma moeda.

Mais uma vez, neste exemplo podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

$$1,93 \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$1,93 (5) \text{ cm}$$

Claro que se colocássemos 1,92 (5) cm, por exemplo, estaríamos igualmente corretos. Lembre-se que o algarismo duvidoso é estimado pelo experimentador e portanto varia conforme a habilidade, a prática, etc. A incerteza colocará o intervalo de confiança no valor de grandeza.

1.2.1. EXPRESSÃO DA INCERTEZA.

Como devemos expressar a incerteza de uma medida? Ou, posto de outra forma: **quantos algarismos significativos** devem ter a incerteza de uma medida? Usaremos a seguinte convenção⁵:

- Se o primeiro dígito significativo da incerteza for menor que 3, usaremos DOIS significativos.
- Caso o primeiro dígito significativo da incerteza for maior ou igual a 3, podemos usar UM ou DOIS algarismos significativos para a incerteza;

Resumindo: qualquer que seja o caso sempre podemos usar dois significativos para expressar a incerteza. Mas atenção: quando a incerteza for resultado de uma estimativa ou apenas indicativa, tal como a metade da menor divisão de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50mm), basta escrever 0,5mm.

1.2.2. EXPRESSÃO DA GRANDEZA

- Usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza;
- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra 1.2.1. acima;
- O número de dígitos depois da vírgula na incerteza tem que ser o mesmo que no mensurando;
- A notação científica pode ser usada para melhor legibilidade.

Veja alguns exemplos abaixo. Note o casamento do número de casas decimais na incerteza e no valor do mensurando.

⁴ Paquímetros e micrômetros tem uma especificação de precisão em seus manuais. O mesmo não ocorre com régua, por exemplo.

⁵ Conforme Vuolo (1992) e Inmetro (1998).

notação errada	notação correta
$5,30 \pm 0,0572$	$5,30 \pm 0,06$
$124,5 \pm 11$	125 ± 11
$0,00002002 \pm 0,0000005$	$(200 \pm 5) \times 10^{-7}$
$(45 \pm 2,6) \times 10^1$	$(45 \pm 3) \times 10^1$

1.3. Conceitos básicos para expressão de incertezas

O texto a seguir é uma adaptação do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicada pelo INMETRO (1998). Infelizmente, normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas também é parte da linguagem científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

1.3.1. Medição

O objetivo de uma **medição** é determinar o **valor** do **mensurando**, isto é, o valor da **grandeza específica** a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição**.

Medição: conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza.

Valor (de uma grandeza): expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. *Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m*

Mensurando: grandeza específica submetida à medição. *Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.*

Grandeza (mensurável): atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo “grandeza” pode se referir a uma grandeza em sentido geral (*comprimento, tempo, massa.*) ou **grandeza específica** (*comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio*). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.

Método de medição: sequência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. *Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de “zero”...*

Procedimento de medição: conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. *Um procedimento (de medição) deve ser um documento com detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações adicionais.*

1.3.2. Resultado de uma medição

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completo quando acompanhado pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries ou conjunto de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

Resultado de uma medição: valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à *indicação*, se é um *resultado corrigido* ou *não corrigido* e se corresponde ao *valor médio de várias medições*. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.

Estimativa: valor de uma estatística (*uma conta*) utilizada para estimar um parâmetro (*uma média, por exemplo*) da totalidade de ítems (*em geral infinito*), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra (*em geral um conjunto limitado de dados*) supondo um determinado modelo estatístico de distribuição (*distribuição normal, por exemplo*).

Incerteza (de medição): parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão.

Repetitividade (de resultados de medições): grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição.

Condições de repetitividade incluem:

- mesmo procedimento de medição
- mesmo observador
- mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
- mesmo local
- repetição em curto período de tempo

1.3.3. Erros e incertezas

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos “erro” e “incerteza”. Esses termos não são sinônimos; ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro

Uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** no resultado da medição. O erro costuma ser classificado em dois componentes: **erro aleatório** e **erro sistemático**. O erro aleatório tem origem em variações imprevisíveis também chamadas efeitos aleatórios. Esses efeitos são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode ser reduzido aumentando o número de observações. Apesar de frequentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. Representa, sim, uma medida da incerteza da média devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido ou, caso seja identificado, deve ser corrigido.

1.4. Estatísticas

Quando se trabalha com vários resultados em condições de repetitividade de uma medição, usam-se algumas estatísticas para resumir e consolidar as informações obtidas. Por exemplo: ao tentar determinar o tempo de queda de um corpo, um aluno mediu uma única vez o evento. Tendo a incerteza do aparelho utilizado, poderíamos ter uma idéia do acerto do aluno. Mas a incerteza cobre apenas o erro do aparelho e não a do aluno ou mesmo do procedimento experimental.

O problema que se coloca é: Como determinar a incerteza de uma medida?

COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem alternativa para este problema é medir várias vezes o mesmo tempo e calcular a *média*. A variabilidade de cada medida é dada pelo *desvio padrão* e a variabilidade da média (caso se obtenham várias médias) será dada pelo *desvio padrão da média*⁶.

O problema é que para obter o valor mais provável a partir de médias, determinar desvios padrão e desvio padrão de médias exige que se façam INFINITAS medidas e definitivamente não temos tempo para isso! Vamos, portanto, ESTIMAR o valor mais provável, o desvio padrão e o desvio padrão da média para um conjunto pequeno de medidas. O desenvolvimento teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados em qualquer livro texto básico de estatística, como o de Helene e Vanin (1981).

A média, o desvio padrão e o desvio padrão da média, para um conjunto finito com n dados podem ser estimados aplicando as equações abaixo.

média de uma amostra com n valores:

$$m = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (1.1)$$

desvio padrão de uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - m)^2} \quad (1.2)$$

desvio padrão da média com n valores:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum (x_i - m)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1.3)$$

Uma maneira gráfica de analisar estatisticamente esses dados é através de um histograma ou gráfico de barras. Neste tipo de gráfico, para uma visualização mais direta, o eixo x é dividido em intervalos iguais que se chamam celas.

Podemos representar a frequência de um evento usando um histograma, seja ela a *frequência absoluta*, f_a , ou a *frequência relativa*, f_r . No caso da frequência absoluta, o eixo y representa a quantidade absoluta de termos dentro do intervalo considerado pela cela. Já a frequência relativa tem no eixo y a fração da quantidade de termos dentro de uma cela, relativa ao conjunto total de medidas. Esta frequência relativa é uma *estimativa* da probabilidade do evento ocorrer dentro de um dado intervalo.

Uma vez que o número de eventos será proporcional à largura da célula para intervalos pequenos, podemos trabalhar com o conceito de *densidade de probabilidade* p . Neste caso, esta densidade será estimada pela divisão de f_r pelo tamanho da cela, Δx ($p = f_r/\Delta x$). Neste caso, a área do gráfico dentro de um certo intervalo é a probabilidade de ocorrer o valor contido no intervalo (daí o nome densidade de probabilidade).

Consideremos uma série de medidas do intervalo de tempo da queda de um corpo, apresentada na tabela 1. Na tabela 2, considerando os intervalos de eventos dados, podemos estimar a frequência absoluta, e dela estabelecer a frequência relativa e a densidade de probabilidade. Note na tabela 2 que $n = 10$ é a

⁶ É comum encontrar a afirmação de que se fazem muitas medidas de uma mesma grandeza para melhorar um resultado. Isto é falso. A incerteza de um processo de medida é uma característica do processo expresso pelo desvio padrão, que independe do número de medidas (para n grande, tipicamente $n > 10$). É verdade que ao realizar muitas medidas pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com $1/\sqrt{n}$. Entretanto, raramente se usa essa abordagem em medidas diretas (não estocásticas). Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de um paquímetro, por exemplo). A verdadeira razão de se repetir uma medida várias vezes é para estimar seu desvio padrão.

quantidade de dados, e o intervalo é representado por um símbolo que, no caso, exclui o valor máximo da cela.

Tabela 1: Tempos de queda de um corpo. (ms)

4.93	0.77	7.01
2.21	6.00	5.17
4.12	5.40	2.56
3.83		

Tabela 2: Análise estatística dos tempos.

Cela	Intervalo	f_a	$f_r=f_a/n$	$p=f_r/\Delta x$
1	0,00 — 2,00	1	0,10	0,05
2	2,00 — 4,00	3	0,30	0,15
3	4,00 — 6,00	4	0,40	0,20
4	6,00 — 8,00	2	0,20	0,10

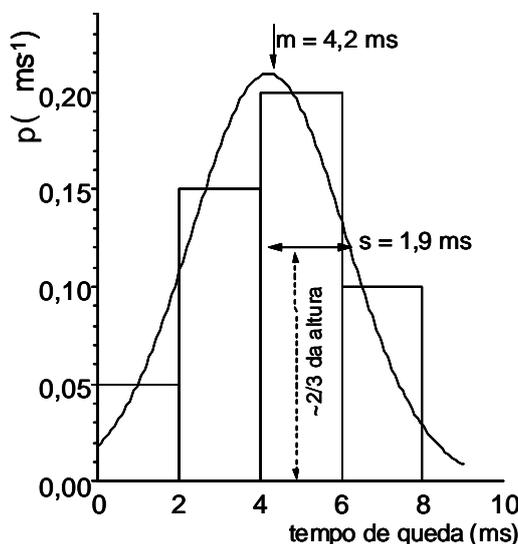


Figura 1.3. Histograma dos tempos de queda de um corpo.

O histograma dos dados na Tabela 1 está na Figura 1.3 acima. Note que a escala do eixo y está em unidades de densidade de probabilidade, que tem unidades de ms^{-1} .

Um exemplo frequente de distribuição encontrada na natureza, para eventos sujeitos a uma perturbação aleatória, é a distribuição gaussiana. Esta distribuição é definida completamente por uma média μ e desvio padrão σ .

Para o conjunto finito de medidas realizado, poderíamos aproximar o histograma de p por uma curva contínua, dada por:

$$p = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-0,5 * (x - m)^2}{s^2}\right) \quad (1.4)$$

onde m é a estimativa da média e s é a estimativa do desvio padrão. Neste histograma, ajustamos uma curva e estimamos sua tendência central, m , ou seja, a média e sua largura, s , o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser estimado graficamente, calculando o valor de x para o qual $|x-m| = s$. Neste caso, temos da equação (1.4):

$$p(|x-m|=s) = Y_o \exp\left(\frac{-0,5*(s)^2}{s^2}\right) \quad (1.5)$$

onde Y_o é a altura do máximo da curva. Isso implica que o desvio padrão pode ser estimado graficamente como a metade da largura total de uma gaussiana medida aproximadamente a $2/3$ da altura, pois

$$p_s = Y_o \exp(-0.5) = 0.61 Y_o \approx \frac{2}{3} Y_o \quad (1.6)$$

Note que a área sob a curva gaussiana no intervalo entre $(m-s)$ e $(m+s)$ será de 68 %, conforme mencionado no início da apostila. Isto implica que 68% das medidas realizadas em um processo sujeito a perturbações aleatórias ocorrerão neste intervalo.

Para um tratamento detalhado da estatística de processos de medida, recomendamos as referências abaixo.

1.5. Referências e bibliografia

- Diretório Central dos Estudantes. *Normalização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas*. 2ª. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p
- Fernandes, Normando C. O laboratório de projetos: inúmeras variações sobre o mesmo tema. *Preprint IFUSP/ P-564*. (1986).
- Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil*. INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p
- Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.
- INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p
- Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos*. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Projeto Disque-Biblio, (1998) 19p.
- Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução a interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).
- Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.
- Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p. IFUSP (sem data).

2. PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

2.1. Introdução

Um *processo de medida* tem sempre por objetivo determinar o *valor médio verdadeiro*, y_{mv} , de uma *grandeza*, cujo *valor verdadeiro* é y_v . Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro, são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$, o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (2.1)$$

Como em geral y_{mv} é um valor inacessível, usam-se *estimativas*: a média dada pela equação 1.1, a estimativa do desvio padrão (eq. 1.2) e do desvio padrão da média (eq. 1.3).

Relembremos alguns termos novos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR

VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

ERRO

SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO

PADRÃO: Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser ‘corrigido’ enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplo 1. Medida da tensão de uma pilha:

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de $1\sigma = 0,25\%$ do valor indicado. A incerteza do processo de medida deve, portanto, ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. As medidas realizadas estão na Tabela 2.1.

Tabela 2.1. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U (volt)	Incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Antes, um comentário: a tabela 2.1 acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo, tabela 2.1b.

Tabela 2.1b. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Vamos aos cálculos. Note que em cálculos intermediários usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

Valor médio:

$$\bar{U} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i = 1,5763 \text{ V}$$

Desvio padrão das medidas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^6 (V_i - 1,5763)^2} = 0,0066 \text{ V}$$

Desvio padrão do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,0066}{\sqrt{6}} = 0,0027 \text{ V}$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida)

$$L_r = \left(\frac{0,25}{100} \right) 1,5763 = 0,0039 \text{ V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do processo de medição) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo, a primeira medida na Tabela 2.1b, pode ser expressa como:

$$U_1 = (1,572 \pm 0,007) \text{ V}$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 2.1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.

Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\bar{U} = (1,5763 \pm 0,0027)V$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um *erro de calibração*. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com voltímetros diferentes? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?*). Podemos supor então que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal. Dessa forma é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada de erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

Erro padrão:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0,0048V$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\bar{U}_p = (1,5763 \pm 0,0048)V$$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média \bar{U} e o desvio padrão da média. Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão. Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

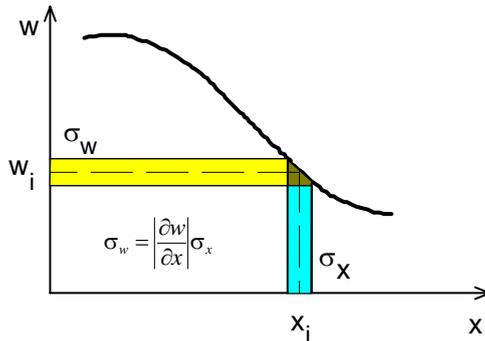
2.2. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar uma outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medida, enquanto que para grandezas determinadas através de fórmulas temos a incerteza propagada.

2.2.1. Cálculo da propagação de incertezas

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função $w = w(x, y, z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e independentes entre si, quanto vale σ_w ? A independência entre $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar suponha w apenas função de x . No gráfico abaixo está representando $w(x)$.



A incerteza de w , neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de x . Para pequenos intervalos no eixo x , temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \sigma_x \quad (2.2)$$

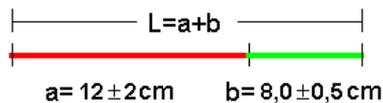
Para várias variáveis independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (2.3)$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (2.3):

$$\begin{aligned} \sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2 \end{aligned}$$

que resulta:

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

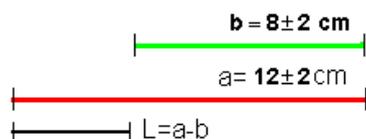
$$\sigma_L = 2,06 \text{ cm}$$

Logo

$$L = (20,0 \pm 2,1) \text{ cm}$$

B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente, usando a equação (2.3):

$$\begin{aligned}\sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1 \cdot \sigma_a^2 + 1 \cdot \sigma_b^2\end{aligned}$$

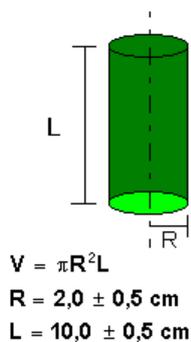
resulta: $\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$
 $\sigma_L = 2,8 \text{ cm}$

Logo $L = (4,0 \pm 2,8) \text{ cm}$

Note que, na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π , R e L.

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 \\ &= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)^2 \sigma_L^2\end{aligned}$$

dividindo por V^2

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_V^2}{V^2} &= \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)^2 \sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2} \\ \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2\end{aligned}$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidos na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \quad (\text{i})$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2,0} \quad (\text{ii})$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0,5}{10,0} \quad (\text{iii})$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa σ_V/V . **NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (V) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA.** Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de algarismos significativos...

$$\sigma_V = 0,5025 \times V = 0,5025 \times 125,7 = 63$$

O resultado do volume do cilindro vale:

$$V = (126 \pm 63) \text{ cm}^3$$

ou ainda

$$V = (13 \pm 6) \times 10 \text{ cm}^3$$

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações, podem ser resumidos como segue:

Na soma ou subtração, a incerteza absoluta do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a incerteza relativa do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados...

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

Qualquer termo menor que 1/3 do maior termo na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e, em geral, pode ser desprezado.

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0,5^2 = 4,25$$

observe que $0,5^2 \ll 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2 \text{ cm}$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam x_1 e x_2 os termos de uma soma em quadratura com $x_2 = k x_1$. A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2(1 + k^2)} \quad (2.3)$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2} \quad (2.4)$$

em que se desprezou x_1 uma vez que $k > 1$. Note que $S > S'$, uma vez que $x_2 > x_1$. Queremos saber, o menor valor de k de forma que S' e S não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0.05 * S \quad \text{ou} \quad \frac{S'}{S} > 0.95 \quad (2.5)$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3.0 \quad (2.6)$$

Isto pode simplificar muito as contas pois, numa soma em quadratura, podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que são os termos da soma em quadratura que devem ser comparados, não as incertezas.

2.3. Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.

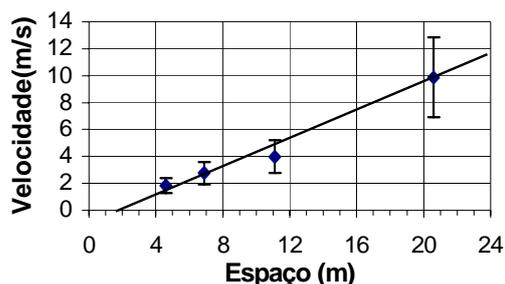
Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplo: Representar dados da Tabela 2.2. em um gráfico.

Tabela 2.2. Espaços e velocidades de um corpo.

n	s ± 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

Figura 2.1 Velocidades e posições de um corpo.



Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0; 0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental. Caso contrário, trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

Quadro 2.1. RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_w
w = x ± y soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

w = axy multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a (y / x) divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = x^m potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $
w = ax multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
w = ax + b	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
w = ax^py^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) função qualquer <u>aplicar a definição</u>	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x \quad b \sigma_x \text{ em radianos}$

3. Linearização de curvas

3.1 Introdução

Numa experiência, costumamos comparar os valores das medições com algum modelo físico, provavelmente expresso na forma de uma equação algébrica. Todavia, muitos fenômenos não são lineares, isto é, não podem ser descritos por uma reta. Nestes casos, modelar os pontos experimentais ou ajustar uma função qualquer aos pontos experimentais requer o uso de métodos numéricos avançados nem sempre disponíveis de forma imediata. Num primeiro momento, pode-se optar pela linearização da função em jogo. A linearização de uma função nada mais é que a transformação de uma função curvilínea (não linear) numa reta, ou seja, a conversão dos dados experimentais por meio de uma mudança de variáveis para uma relação linear que permita ajustar uma reta e determinar os seus coeficientes. Invertendo o procedimento de linearização, pode-se então determinar os parâmetros da função não linear procurada.

Exemplo: Para determinar a aceleração da gravidade, usamos os dados de um corpo em queda livre. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:

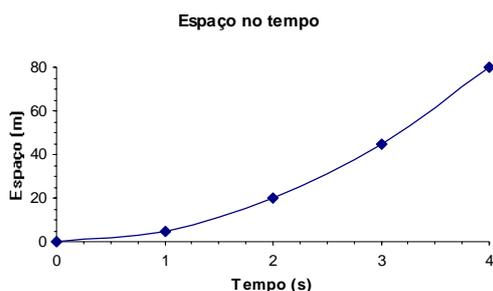


Figura 3.1. Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.

Neste tipo de gráfico, onde $s = s_0 + v_0.t + (a/2)t^2$, não é imediato determinar a aceleração do corpo. Mesmo supondo $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$ (com o eixo y no sentido da aceleração) a expressão se converte em:

$$s = at^2/2 \quad (3.1)$$

que ainda é uma função não linear em t . Se, ao invés de graficarmos “ $s \times t$ ” como na figura 3.2, graficarmos “ $s \times t^2/2$ ”, teremos uma reta:

$$s = ax \quad (3.2)$$

Onde a é o coeficiente angular da reta, conforme pode ser visto na figura 3.2. Logo:

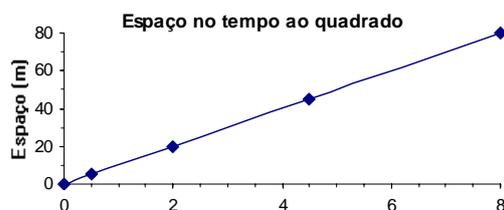


Figura 3.2. $s(t^2/2)$ para um corpo em queda livre.

Pode ocorrer que as grandezas medidas sejam afetadas por um desvio constante. No exemplo acima, poderia ter ocorrido que o tempo e/ou espaço inicial sejam diferentes de zero. Esses desvios (inicialmente lineares), em geral introduzem desvios não lineares nas novas variáveis “linearizadas” e podem invalidar suas conclusões. Dada sua natureza, esses desvios costumam afetar mais os valores “pequenos” que os “grandes” e podem ser identificados na forma de desvio sistemático dos pontos experimentais da curva (linear) graficada.

Existem diversos outros métodos de linearização: Ainda se usa muito graficar o logaritmo das grandezas o que reduz potências em coeficientes angulares e coeficientes multiplicativos em lineares. Os papéis dílog e mono-log são uma forma prática de executar transformações log sem necessidade de cálculos. Outro método, que na prática reduz o grau da função, é graficar a derivada da função. Não há uma regra geral para linearização de funções. Prática e criatividade são alguns dos requisitos.

3.2 Funções tipo $y = ae^{bx}$

Funções exponenciais podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos, que resulta:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) \quad (3.3)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \quad (3.4)$$

definindo $Y = \ln(y)$ e $A = \ln(a)$, temos:

$$Y = A + bx \quad (3.5)$$

que é uma reta com coeficiente linear A e coeficiente angular b .

3.3. O papel gráfico logarítmico

Antes do uso generalizado de calculadoras, não era simples determinar o logaritmo de um número. Podia-se usar (e ainda se usa) o papel mono-logarítmico, cuja escala vertical, Y , é desenhada de tal forma que a distância linear até a origem (eixo x) é o **logaritmo decimal** do número indicado na escala. Dessa forma, o papel grafica automaticamente o log do número indicado.

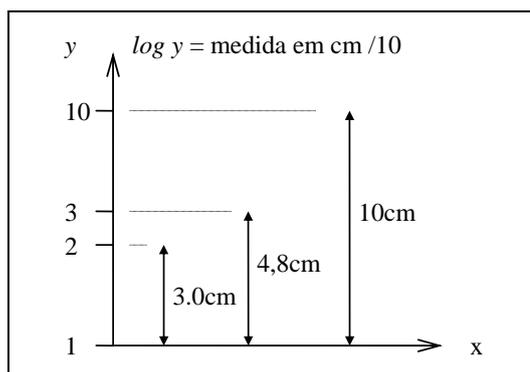


Figura 3.3. Escala mono-log. Neste caso, a escala, também denominada ciclo, é de 10cm para cada ordem de grandeza (fator 10). Outras escalas e vários ciclos são possíveis. (um exemplo: dado que $\log(3) = 0.477$, temos que $10 \cdot \log(3) = 4.8\text{cm}$.)

O papel di-logarítmico (di-log) repete o eixo log também para o eixo das abcissas (eixo x) e é útil para linearizar potências simples, tais como $y = a\sqrt{bx}$ que será discutido a seguir.

3.3. Funções tipo $y = ax^b$

Potências simples do tipo ax^b também podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos:

$$\log(y) = \log(a) + b\log(x) \quad (3.6)$$

Levando novamente a uma reta com coeficiente angular b e coeficiente linear $\log(a)$.

4. Interpolação de tabelas.

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros especializados, é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, em geral ocorre que a temperatura desejada está entre dois valores tabelados. A solução é interpolar os dados da tabela. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: pode-se usar polinômios, funções logarítmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em qualquer livro básico de métodos numéricos.

Ocorre que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear seja suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo abaixo:

Tabela 4.1. Pressão de vapor da água líquida.

Temperatura (°C)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Para determinar a pressão de vapor a 90°C, pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100°C. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura 4.1 exemplifica o procedimento graficamente.

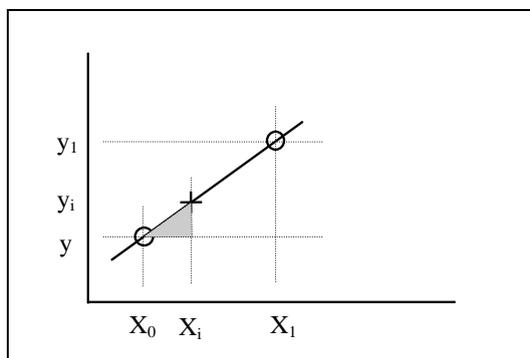


Figura 4.1. Representação gráfica de uma interpolação linear.

Sejam os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto (x_i, y_i) intermediário.

$$\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \right) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (4.1)$$

Isolando y_i temos:

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0) \cdot \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (4.2)$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80) \cdot \left(\frac{760 - 355}{100 - 80} \right) \quad (4.3)$$

que fornece o valor procurado:

$$P_{90} = 558 \text{ Torr.}$$

4.1. Referências e fontes bibliográficas

Coraci P. Malta., FAP139, *Laboratório de Física 2*. IFUSP, 1997. Textos e descrição dos equipamentos do laboratório didático do IFUSP.

Richard P. Feynman., Robert B. Leighton, e Matthew Sands. *Lectures on Physics*, Vol. 1. 1971.

Alvin Hudson, Rex Nelson. *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publishing. 1990.

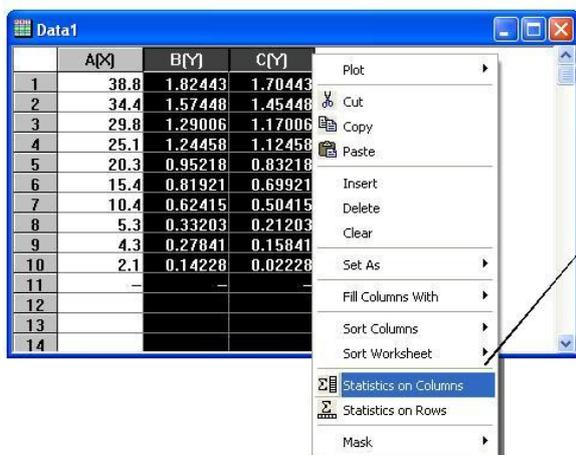
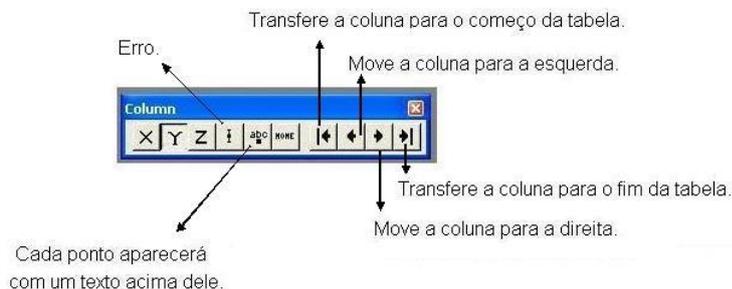
Origin 6 – Funções Básicas*

LabFlex – Física Experimental III e IV
Elisa Morandé Sales

1. Barra de ferramentas



2. Tabelas

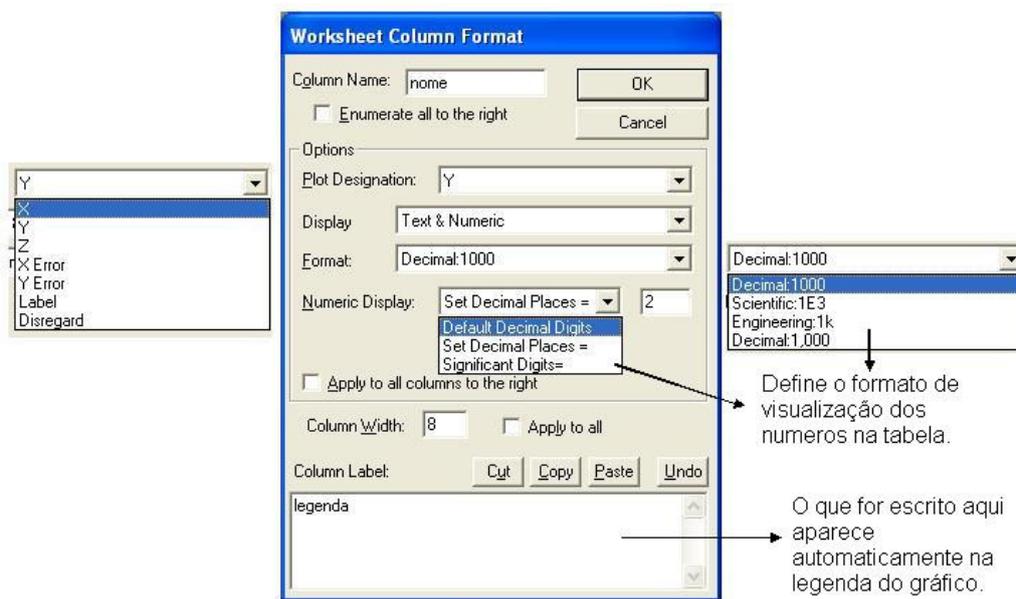


Ao selecionar mais de uma coluna (ou linha) ao mesmo tempo, surge a opção estatística.

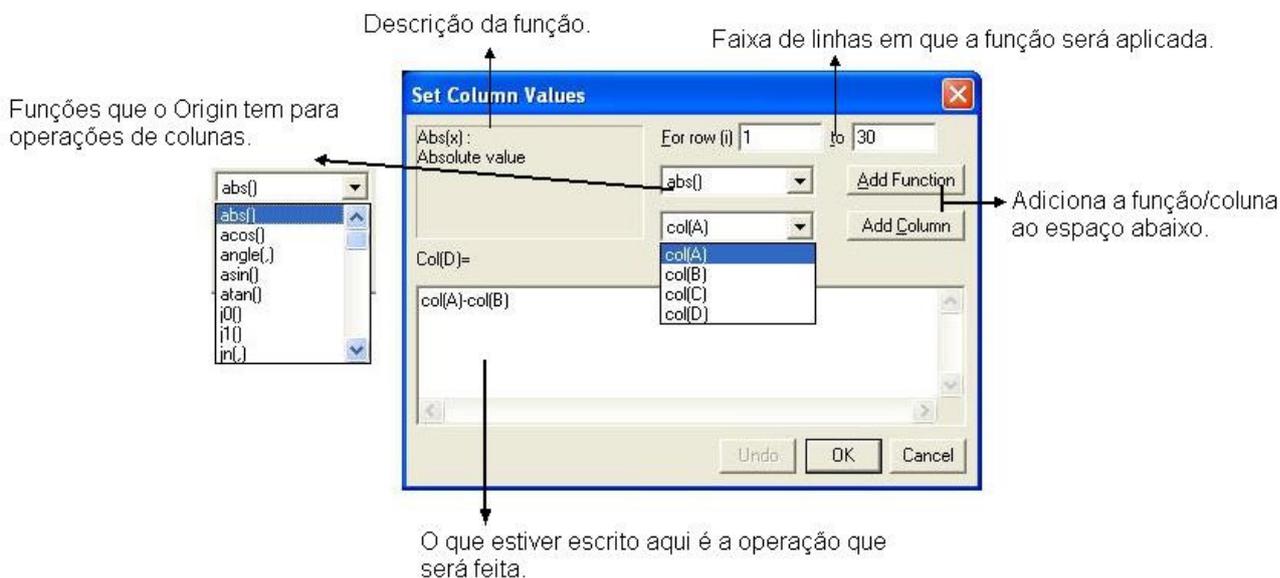
Essa opção dá varios resultados ao mesmo tempo: média, desvio padrão, mínimo, máximo e soma.

* Essas mesmas funções podem ser encontradas em versões mais atuais do Origin, podendo apenas apresentar algumas pequenas modificações na localização das ferramentas. Escolhemos esta versão por ser a utilizada nos computadores do Laboratório Didático

clicando duas vezes na parte cinza da coluna, aparecerá a tela abaixo:



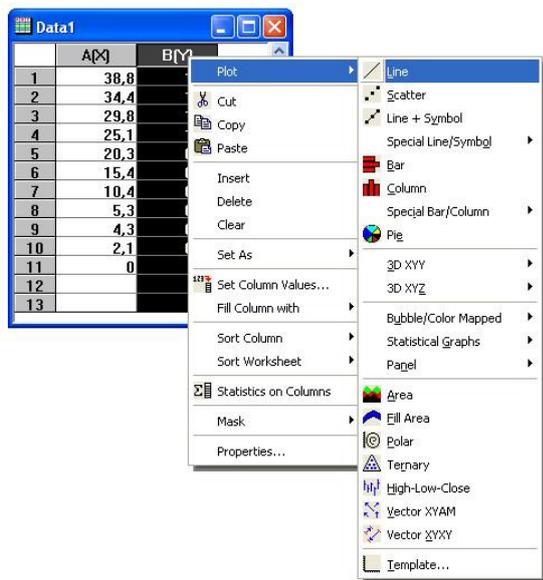
Para fazer operações entre colunas, em geral é mais fácil utilizar o Excel. Mas no Origin também é possível. Para isso, clique com o botão direito na coluna que receberá o resultado. Selecione a opção Set Column Values. Em seguida aparecerá a tela abaixo:



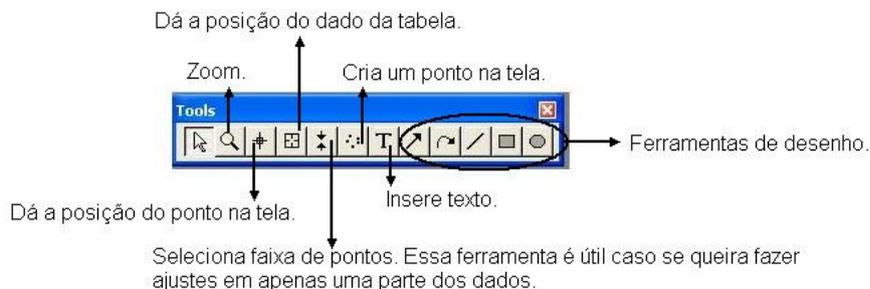
- Dicas:
- ao escrever i no espaço de criar a operação, ele usa o número da linha.
 - antes de fazer as contas, verifique se o Origin está funcionando com , ou . para definir decimais. Caso não reconheça o símbolo, a conta não será feita.
 - verificar se os parenteses referentes às operações e às colunas foram abertos E fechados.

3. Gráficos

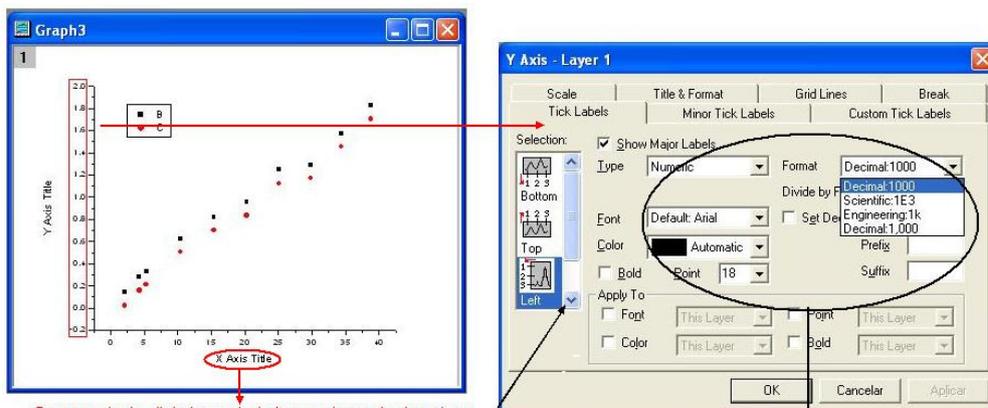
Para criar um gráfico: clique com o botão direito. Em plot aparecem várias opções de formato de gráfico. É possível selecionar mais de uma coluna ao mesmo tempo, assim como as respectivas colunas com os erros.



Ao criar um gráfico, a barra de ferramentas abaixo fica ativa:



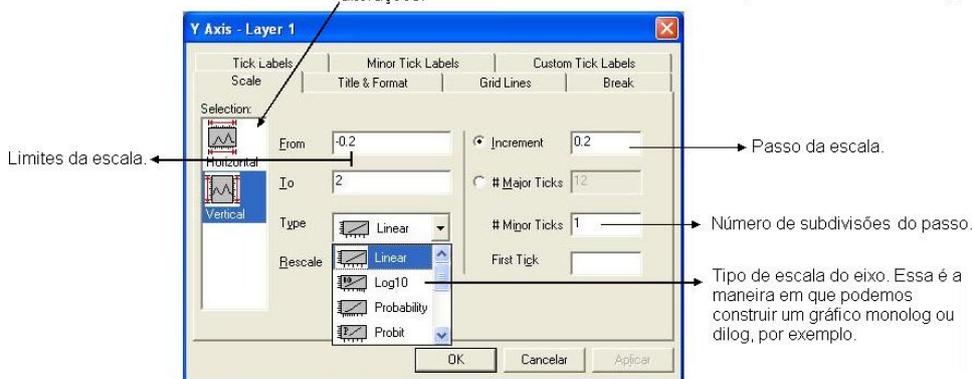
Clicando duas vezes em um dos dois eixos, aparecerá a tela abaixo:



Com um duplo click é possível alterar a legenda dos eixos.

Selecione o eixo que sofrerá as alterações.

Formatação da escala. Tamanho, cor, fonte e formato da numeração.



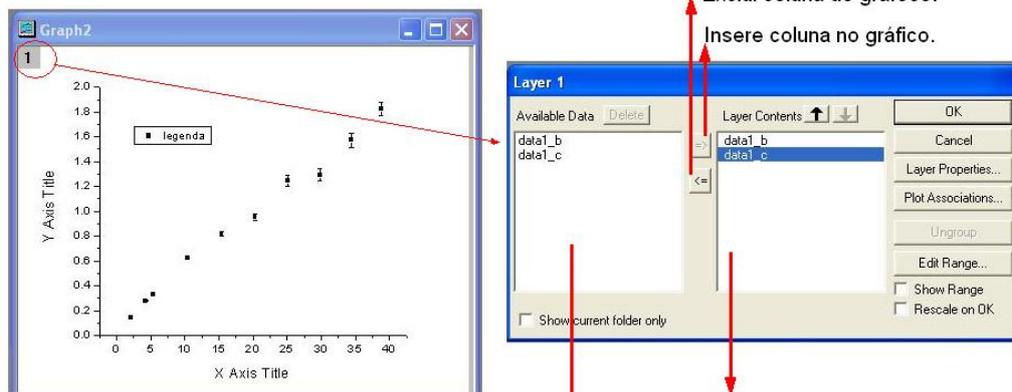
Limites da escala.

Passo da escala.

Número de subdivisões do passo.

Tipo de escala do eixo. Essa é a maneira em que podemos construir um gráfico monolog ou dilog, por exemplo.

Clicando duas vezes no 1, localizado no canto superior esquerdo:



Exclui coluna do gráfico.

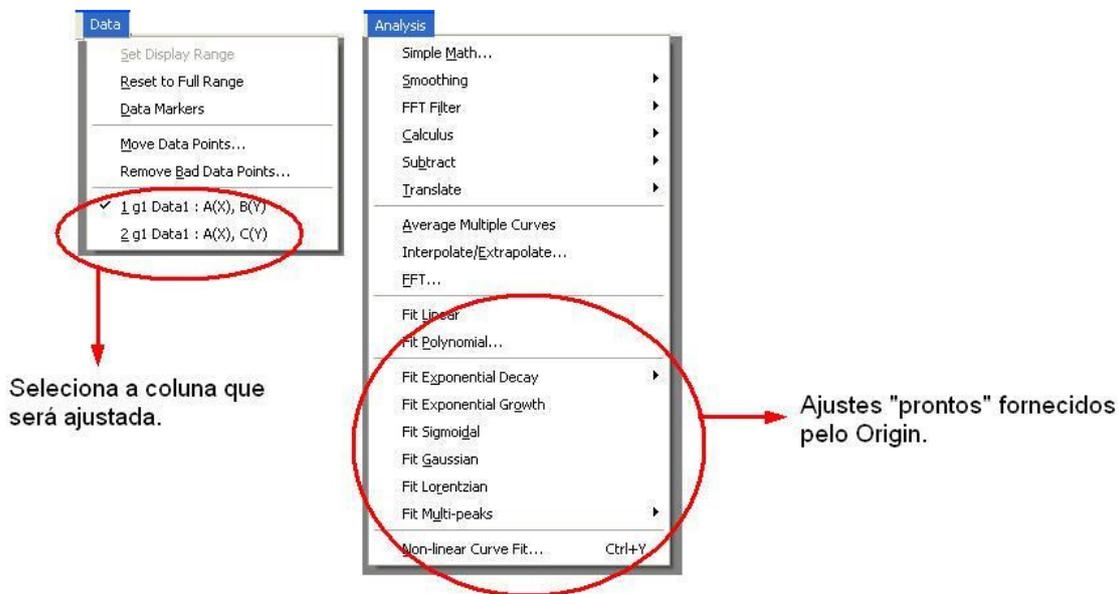
Inserir coluna no gráfico.

Colunas utilizadas no gráfico.

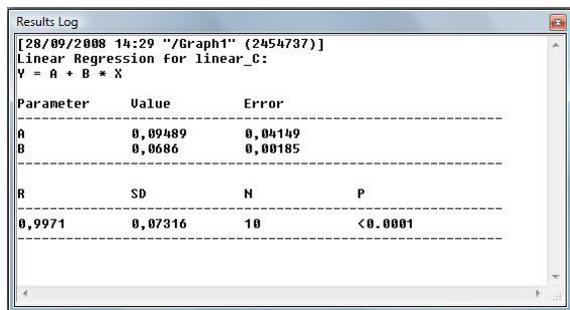
Mostra todas as colunas Y ou Ysd.

Na barra de menus, ao selecionar uma página de gráfico aparecem menus diferentes. Entre eles estão o menu Analysis e o Data. Através do menu Data selecione a coluna com a qual deseja trabalhar.

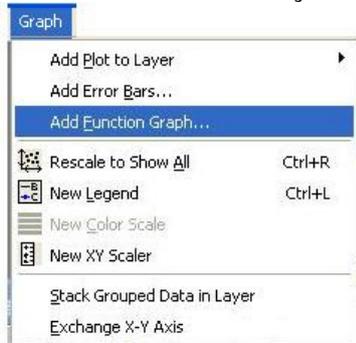
No menu Analysis existem algumas opções de ajustes pré-montados pelo Origin. Caso queira ajustar uma função que não se encontra entre essas, vá em Non Linear Curve Fit.



Results log: nesta tela aparecerão os coeficientes (assim como os respectivos erros) referentes ao ajuste desejado.

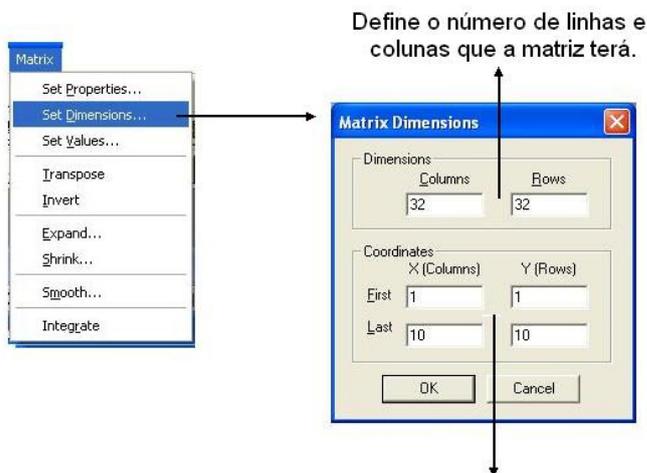


Para adicionar uma função no gráfico:



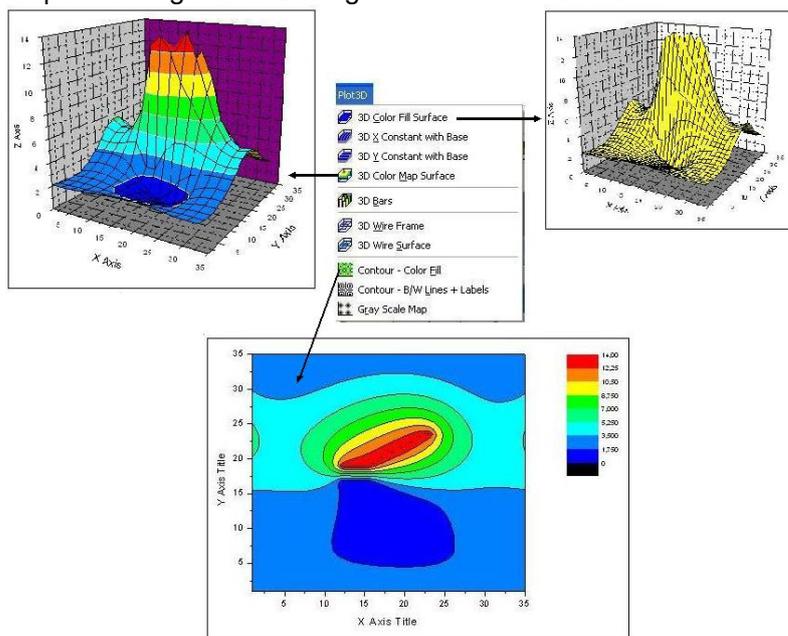
4. Matrizes

O uso de uma planilha do tipo Matriz se torna muito útil quando queremos fazer gráficos em 3 dimensões.

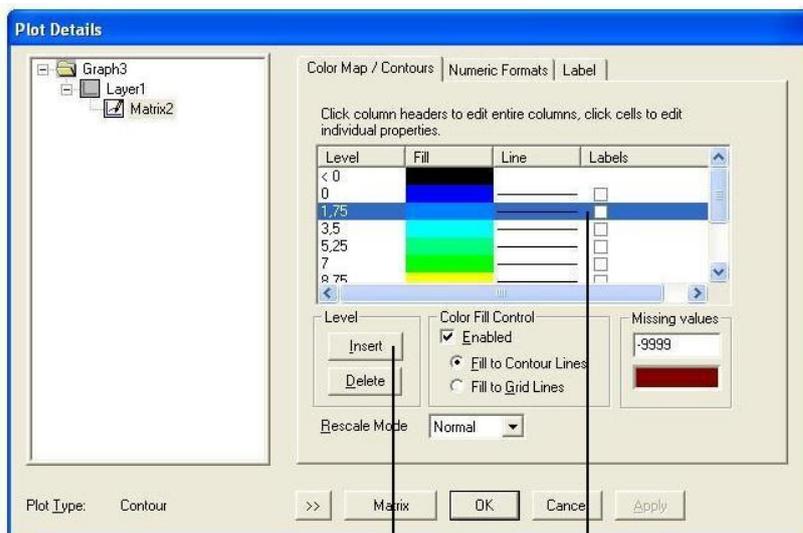
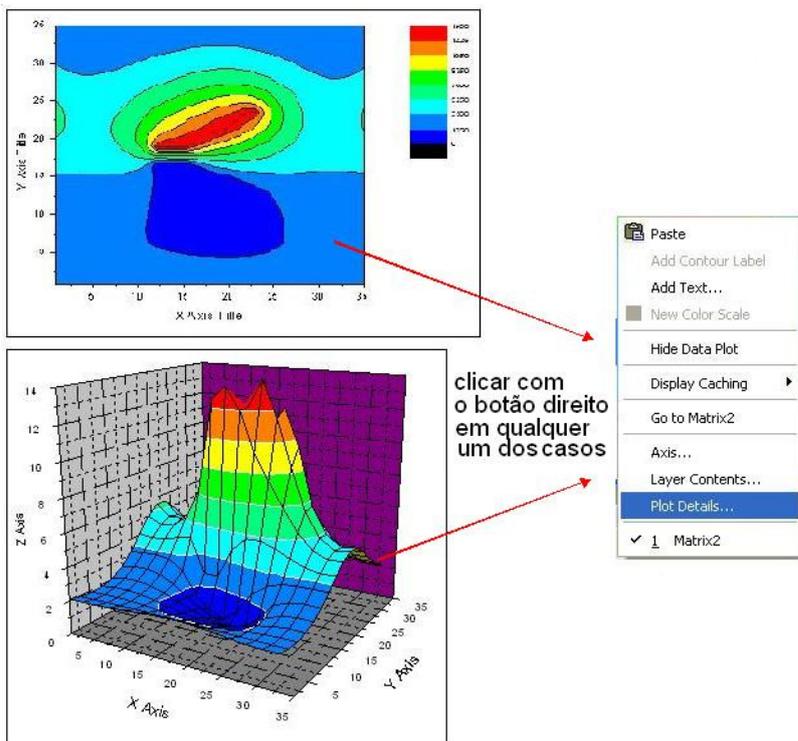


Define quais as dimensões (em cm, por exemplo) dessa matriz. É por aqui que determinamos a escala que aparecerá nos gráficos.

Para plotar um gráfico 3D ou gráfico de curva de nível:



Para adicionar níveis intermediários de cores:



Adiciona níveis intermediários na escala de cor do gráfico.



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Física Experimental I

Título do Experimento

Nome do Estudante

João Pessoa - PB
mês e ano

Sumário

1	Introdução	3
2	Metodologia	4
2.1	Descrição do Aparato Experimental	5
2.1.1	Procedimento Experimental	6
3	Resultados	7
4	Considerações finais	8

1 Introdução

A Introdução deve conter o contexto histórico do experimento, os objetivos, discussão do tema da experiência, apresentação das fórmulas e leis físicas utilizadas e outros comentários que são importantes, mas que não se enquadrem em outras partes do relatório. Exemplo de referência [2].

O texto a seguir é só um exemplo para apresentação e detalhamento de equações.

$$M_e(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}, \quad (1)$$

onde $C_1 = 2\pi hc^2 = (3,7405 \pm 0,0001) \times 10^{-16} Wm^2$ e $C_2 = \frac{ch}{K} = (1,43878 \pm 0,0001) \times 10^{-2} mK$.

Se a densidade de fluxo de energia L_e de um corpo negro, que consiste na energia [1] emitida por unidade de área e unidade de tempo para uma temperatura T e comprimento de onda λ dentro de um intervalo $d\lambda$, é designada por

$$L_e = \frac{dL(T, \lambda)}{d\lambda}$$

a equação de Planck indica:

$$\int M_e(\lambda) d\lambda = \left(\frac{2\pi^5}{15} \frac{K^4}{c^2 h^3} \right) T^4, \quad (2)$$

onde c é a velocidade da luz $c = (3,00 \pm 0,01) \times 10^8$ m/s, h é a constante de Planck $h = (6,62 \pm 0,01) \times 10^{-34}$ Js e K é a constante de Boltzmann ($K = 1,381 \pm 0,001) \times 10^{-23} JK^{-1}$.

O texto acima é só um exemplo para apresentação e detalhamento de equações.

2 Metodologia

Descrever detalhadamente os procedimentos e etapas da experiência. Este item deve conter elementos suficientes para que qualquer pessoa possa ler e reproduzir seu experimento. Neste exemplo de referência, todas seguem uma numeração em ordem de aparecimento no texto [3].

- Não escreva em tópicos a metodologia.
- Não se devem incluir resultados nem discussões nesta etapa.
- Principalmente nesta parte, o texto deve ser redigido na forma impessoal no tempo passado. Ex: a massa do sólido foi pesada na balança modelo XXX com precisão...

2.1 Descrição do Aparato Experimental

Esta parte do relatório deve conter uma descrição completa, mas bastante objetiva, dos seguintes itens:

- arranjo experimental (não é aceitável a simples listagem dos equipamentos utilizados);
- procedimento experimental;
- características de instrumentos e incertezas de leitura;
- cuidados particulares e detalhes relevantes.

Geralmente, a descrição do arranjo experimental deve incluir figuras mostrando suas características e dimensões relevantes. A qualidade artística do desenho é menos importante do que a clareza na informação. Em procedimento experimental, deve-se dar uma descrição resumida do procedimento utilizado para obtenção das medidas, dispensando-se também aqui a descrição do óbvio. Devem também ser apresentados nesta parte do relatório características e detalhes de instrumentos utilizados, discussão de incertezas instrumentais e cuidados particulares que tenham sido adotados na tomada de dados. Exemplo de figuras e sua citação no texto. Veja a Fig. 1.

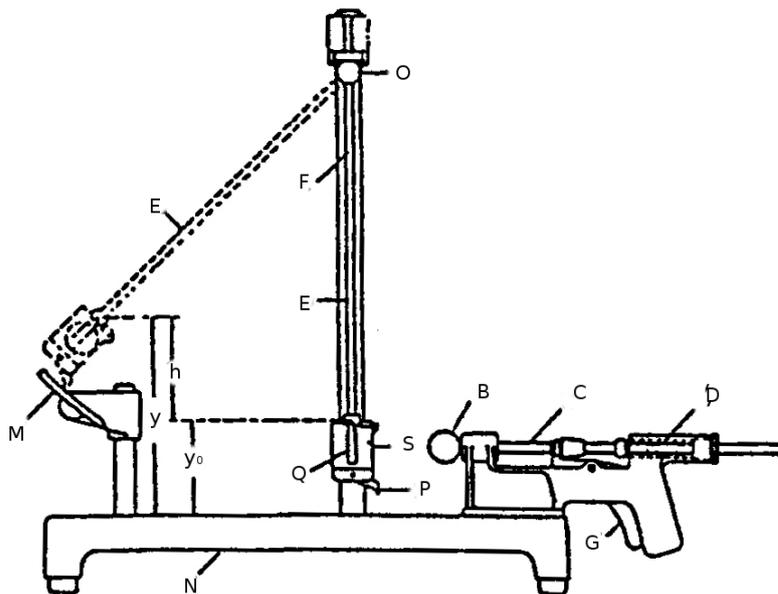


Figura 1: Exemplo de utilização de imagens. A Eq. (2) é só um exemplo de citação de equações aqui!

3 Resultados

Os resultados devem, evidentemente, ser discutidos e comentados na parte anterior da síntese. Mas geralmente existe esta parte final, na qual se deve discutir a experiência como um todo. Esta parte geralmente inclui discussão dos seguintes pontos:

- acordo entre resultados obtidos na experiência e valores experimentais obtidos de outras fontes ou valores de referência;
- crítica do método de medição e do equipamento utilizado;
- sugestões e comentários sobre a experiência.

É essencial que se apresentem as conclusões às quais os dados permitem chegar, frente aos objetivos que foram colocados na introdução de cada experimento [4].

4 Considerações finais

Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto
Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto Texto

Referências

- [1] Hugo L. Fragnito e Antonio C. Costa, *Roteiro de laboratório do Experimento: Difração por fendas Unicamp-IFGW, março de 2010*, Disponível em <http://sites.ifi.unicamp.br/hugo/files/2013/12/diffraction.pdf> (Março de 2016).
- [2] D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física*, LTC, Rio de Janeiro, vol. 4, 8a. Ed. (2008).
- [3] Phywe, *Manual PHYWE de Experimentos de Física Moderna*, Versão 11.10 - 2010.
- [4] Robert Eisberg, Robert Resnick, “Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles“, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1985